Mécanique analytique, Corrigé 4

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
nathan.brunet@epfl.ch
lorenzo.fioroni@epfl.ch
filippo.ferrari@epfl.ch
jonas.daverio@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
mathias.findrihan@epfl.ch
remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Système binaire en deux dimensions

a) Écrire le Lagrangien du système en coordonnées cartésiennes.
Le Lagrangien en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{x}}_1^2 + \dot{\vec{x}}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - l_0\right)^2. \tag{1}$$

b) Réécrire le Lagrangien après avoir effectué les changements de variables suivants :

$$\vec{x}_{cm} = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}, \qquad \vec{d} = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{2}. \tag{2}$$

$$\vec{d} = (d\cos\phi,\, d\sin\phi), \tag{3}$$

$$\vec{x}_{cm} = (x_{cm},\, y_{cm}). \tag{4}$$

En insérant la première transformation, on obtient :

$$\mathcal{L} = m(\dot{\vec{x}}_{cm}^2 + \dot{\vec{d}}^2) - \frac{k}{2}(2d - l_0)^2, \tag{5}$$

et après la seconde :

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}\left(\dot{x}_{cm}^2 + \dot{y}_{cm}^2 + \dot{d}^2 + d^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{K}{2}(d - L_0)^2, \tag{6}$$

où l'on a défini $M = 2m$, $L_0 = l_0/2$ et $K = 4k$.

c) Établir les équations d'Euler–Lagrange et montrer que la vitesse du centre de masse est une constante du mouvement.
Les équations d'Euler–Lagrange donnent :

$$\frac{d}{dt}[M\dot{\vec{x}}_{cm}] = 0, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}[Md^2\dot{\phi}] = 0, \tag{8}$$

$$M\ddot{d} = -(K - M\dot{\phi}^2)d + KL_0. \tag{9}$$

Puisque M est constant, nous obtenons donc $\dot{\vec{x}}_{cm} = \vec{v}_{cm} = \text{const}$. La vitesse du centre de masse est donc bien une quantité conservée.

d) Identifier deux autres grandeurs conservées et discuter leur interprétation physique.

Puisque le Lagrangien est indépendant du temps, la fonction hamiltonienne (qui correspond ici à l'énergie mécanique) est conservée :

$$h = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \frac{M}{2}\left(\dot{\vec{x}}_{cm}^2 + \dot{d}^2 + d^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{K}{2}(d - L_0)^2 = E. \tag{10}$$

La variable ϕ étant cyclique, son moment conjugué est conservé :

$$L = Md^2\dot{\phi}, \tag{11}$$

ce qui correspond au moment cinétique selon l'axe z.

e) Considérer maintenant l'approximation suivante :

$$\epsilon = \frac{d - L_0}{L_0} \ll 1. \tag{12}$$

i) Expliquer, en termes physiques, à quoi correspond l'approximation précédente.

Nous faisons l'approximation de petites oscillations (en amplitude) autour de la longueur d'équilibre L_0.

ii) Résoudre les équations du mouvement dans cette approximation.

On effectue la substitution $d = L_0(1+\epsilon)$. On peut ensuite modifier directement les équations du mouvement ou le Lagrangien. Dans les deux cas, on obtient :

$$\dot{\phi} = \frac{L}{ML_0^2(1+\epsilon)^2} \simeq \frac{L}{ML_0^2}[1 - 2\epsilon], \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\epsilon} &= -\left(\frac{K}{ML_0}(1+\epsilon) - \frac{L^2}{M^2L_0^3(1+\epsilon)^3}\right) + \frac{K}{M}\frac{L_0\epsilon}{L_0} \\
&\simeq -\left(\frac{K}{ML_0}\epsilon - \frac{L^2}{M^2L_0^3}[1 - 3\epsilon]\right) \\
&= -\epsilon\left(\frac{K}{ML_0} + \frac{3L^2}{M^2L_0^4}\right) + \frac{L^2}{M^2L_0^3},
\end{aligned}$$

où l'on a défini

$$\tilde{\Omega}^2 = \frac{K}{ML_0} + \frac{3L^2}{M^2L_0^4}, \qquad \gamma = \frac{L^2}{M^2L_0^3}. \tag{14}$$

On peut alors résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique en ϵ, et on obtient :

$$\epsilon(t) = A\cos\!\left(\tilde{\Omega}t + \chi\right) + \frac{\gamma}{\tilde{\Omega}^2}, \tag{1}$$

et

$$\phi(t) \simeq \frac{L}{ML_0^2}\left[t\left(1 - \frac{\gamma}{\tilde{\Omega}^2}\right) - 2\left(\frac{A}{\tilde{\Omega}}\sin\!\left(\tilde{\Omega}t + \chi\right)\right)\right] + B. \tag{2}$$

iii) Déterminer une condition sur K, M et $\dot{\phi}$ pour que l'approximation reste valable, et en donner une interprétation physique.

L'approximation est valable pour autant que $\epsilon \ll 1$. Ceci est possible si $\frac{\gamma}{\tilde{\Omega}^2} \ll 1$, ce qui revient à la condition

$$\frac{K}{ML_0} \gg \frac{L^2}{M^2 L_0^4}, \tag{15}$$

ou encore $\tilde{\Omega} \gg \dot{\phi}$: la fréquence des oscillations doit être beaucoup plus grande que celle de rotation. Il y a donc séparation d'échelles de temps.

Exercice 2 : Deux particules avec contraintes, interaction, et force externe

a) Écrivez le Lagrangien du système en coordonnées cylindriques.
Le Lagrangien en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(r_1^2\dot{\theta}_1^2 + r_2^2\dot{\theta}_2^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2) + z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2\right). \tag{16}$$

b) En sachant que le cercle 1 bouge en suivant une loi horaire $z_1(t)$ imposée par l'extérieur, écrivez les équations d'Euler–Lagrange.
On obtient :

$$\begin{cases} mr_1^2\ddot{\theta}_1 + kr_1r_2\sin(\theta_1-\theta_2) = 0, \\ mr_2^2\ddot{\theta}_2 - kr_1r_2\sin(\theta_1-\theta_2) = 0, \\ m\ddot{z}_2 + k(z_2 - z_1(t)) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

c) Trouvez une quantité conservée dans le cas du point b).
En sommant les deux premières équations du résultat précédent, on obtient après intégration :

$$mr_1^2\dot{\theta}_1 + mr_2^2\dot{\theta}_2 = L_z = \text{const.} \tag{17}$$

Remarque : cette quantité conservée peut en fait se déduire d'une symmétrie du système d'après le théorème de Noether, que nous verrons durant le semestre.

d) On considère maintenant le cas différent où la position moyenne des deux cercles

$$z_m = \frac{z_1+z_2}{2} \tag{18}$$

suit une loi horaire imposée par l'extérieur $z_m(t)$. Quelles sont maintenant les quantités conservées ?

Par le même argument qu'au point (c), le moment cinétique L_z est toujours conservé dans cette situation.

Pour trouver la seconde quantité conservée, considérons le changement de variables suivant :

$$z_{cm} = \frac{z_1+z_2}{2}, \qquad d = \frac{z_1-z_2}{2}. \tag{19}$$

Le Lagrangien prend maintenant la forme :

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2}m\left(r_1^2\dot{\theta}_1^2 + r_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{d}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2) + 4d^2\right)\right] + m\dot{z}_{cm}^2 = \mathcal{L}_1(\theta_1,\theta_2,\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2,d,\dot{d}) + \mathcal{L}_2(t). \tag{20}$$

On voit donc que le Lagrangien total se sépare en deux sous-Lagrangiens non-interagissants : le premier étant indépendant du temps, la fonction hamiltonienne qui y est associée est conservée :

$$h_1(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, d, \dot{d}) = \frac{1}{2} m \left(r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + r_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{d}^2 \right) + \frac{1}{2} k \left(r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 4d^2 \right). \quad (21)$$

Exercice 3 : Deux circuits LC couplés

Dispositif et coordonnées généralisées. Deux branches sont reliées à la masse : la branche gauche contient (L_1, C_1), la branche droite contient (L_2, C_2). Les deux nœuds supérieurs sont couplés par un condensateur C'. On choisit comme coordonnées généralisées les charges sur les condensateurs de branche,

$$q_1(t) \equiv Q_1(t), \qquad q_2(t) \equiv Q_2(t),$$

de sorte que les courants de branche sont les vitesses généralisées

$$\dot{q}_1 = I_1, \qquad \dot{q}_2 = I_2.$$

Avec une convention de signe cohérente, la charge sur le condensateur de couplage vaut

$$q_3(t) = -(q_1 + q_2).$$

Énergies et Lagrangien. L'énergie magnétique (inductive, « cinétique ») est

$$T = \frac{1}{2} L_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{q}_2^2.$$

L'énergie électrique (capacitive, « potentielle ») est

$$V = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{(q_1 + q_2)^2}{2C'}.$$

Le Lagrangien s'écrit donc

$$\boxed{\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} L_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} + \frac{(q_1 + q_2)^2}{C'} \right).} \quad (22)$$

Sous forme matricielle quadratique :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}} M \dot{\boldsymbol{q}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{q}^{\mathsf{T}} K \boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \; M = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}, \; K = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{1}{C'} & \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C'} \end{bmatrix}.$$

Équations d'Euler–Lagrange et forme en courants. Les équations d'Euler–Lagrange donnent

$$L_1\,\ddot{q}_1 + \Big(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'}\Big)q_1 + \frac{1}{C'}\,q_2 = 0, \tag{23}$$

$$L_2\,\ddot{q}_2 + \Big(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C'}\Big)q_2 + \frac{1}{C'}\,q_1 = 0. \tag{24}$$

En dérivant et en utilisant $I_i = \dot{q}_i$, on obtient les équations en courants :

$$L_1\,\ddot{I}_1 + \Big(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'}\Big)I_1 + \frac{1}{C'}\,I_2 = 0, \tag{25}$$

$$L_2\,\ddot{I}_2 + \Big(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C'}\Big)I_2 + \frac{1}{C'}\,I_1 = 0. \tag{26}$$

Modes normaux dans le cas général (branches inégales) On cherche des solutions harmoniques $q_i(t) = Q_i e^{i\omega t}$. On pose

$$a_1 = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'}, \qquad a_2 = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C'}.$$

Le vecteur d'amplitudes $\boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2)^{\mathsf{T}}$ vérifie

$$\begin{bmatrix} -a_1 + \omega^2 L_1 & -1/C' \\ -1/C' & -a_2 + \omega^2 L_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0},$$

dont la condition d'existence de solutions non triviales est

$$(-\omega^2 L_1 + a_1)(-\omega^2 L_2 + a_2) - \frac{1}{C'^2} = 0. \tag{27}$$

Autrement dit, le polynôme quadratique en ω^2,

$$L_1 L_2\,\omega^4 - (L_1 a_2 + L_2 a_1)\,\omega^2 + \Big(a_1 a_2 - \frac{1}{C'^2}\Big) = 0, \tag{28}$$

a pour racines

$$\boxed{\omega_\pm^2 = \frac{L_1 a_2 + L_2 a_1 \;\pm\; \sqrt{(L_1 a_2 + L_2 a_1)^2 - 4 L_1 L_2 \Big(a_1 a_2 - \dfrac{1}{C'^2}\Big)}}{2 L_1 L_2}.} \tag{29}$$

On notera l'identité utile

$$a_1 a_2 - \frac{1}{C'^2} = \frac{1}{C_1 C_2} + \frac{1}{C'}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right).$$

Pour chaque $\omega = \omega_\pm$, le rapport $r_\pm = Q_2/Q_1$ se déduit de la première ligne :

$$\boxed{r_\pm = \frac{Q_2}{Q_1} = C'\big(\omega_\pm^2 L_1 - a_1\big) = \frac{a_2 - \omega_\pm^2 L_2}{1/C'}\;.} \tag{30}$$

On peut prendre des vecteurs propres non normalisés $\boldsymbol{v}_\pm = (1,\ r_\pm)^{\mathsf{T}}$, puis les M-orthonormaliser (i.e. $\boldsymbol{v}_\mu^{\mathsf{T}} M\,\boldsymbol{v}_\nu \propto \delta_{\mu\nu}$) si souhaité.

Solution générale. Avec des constantes réelles $A_\pm, B_\pm$ fixées par les conditions initiales,

$$\boldsymbol{q}(t) = A_+\boldsymbol{v}_+\cos(\omega_+ t) + B_+\boldsymbol{v}_+\sin(\omega_+ t) + A_-\boldsymbol{v}_-\cos(\omega_- t) + B_-\boldsymbol{v}_-\sin(\omega_- t). \tag{31}$$

Les courants s'en déduisent : $I_1 = \dot{q}_1$, $I_2 = \dot{q}_2$.

Cas particulier des circuits identiques Si $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$, les équations (23)–(24) deviennent

$$L\,\ddot{q}_1 + \Big(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\Big)q_1 + \frac{1}{C'}\,q_2 = 0, \qquad L\,\ddot{q}_2 + \Big(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\Big)q_2 + \frac{1}{C'}\,q_1 = 0.$$

En introduisant les coordonnées normales $q_\pm = \frac{1}{2}(q_1 \pm q_2)$ (équivalemment $I_\pm = \dot{q}_\pm$), on obtient la décorrélation

$$\ddot{q}_+ + \omega_0^2(1+2\alpha)\,q_+ = 0, \qquad \ddot{q}_- + \omega_0^2\,q_- = 0,$$

avec $\omega_0^2 = 1/(LC)$ et $\alpha = C/C'$. Ainsi,

$$\omega_+ = \sqrt{1+2\alpha}\,\omega_0, \qquad \omega_- = \omega_0,$$

et

$$I_+(t) = \dot{q}_+(t), \quad I_-(t) = \dot{q}_-(t), \quad I_{1,2}(t) = I_+(t) \pm I_-(t).$$

Moments conjugués et fonction Hamiltonienne. Les moments canoniques conjugués à q_i sont

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = L_i\dot{q}_i = L_i I_i, \qquad i = 1,2. \tag{32}$$

Ils correspondent aux liaisons de flux des inductances dans le modèle concentré. L'Hamiltonien vaut

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{2} p_i\dot{q}_i - \mathcal{L} = \tfrac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2\dot{q}_2^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} + \frac{(q_1+q_2)^2}{C'}\right) \\ &\equiv T + V. \end{aligned} \tag{33}$$

Comme $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du temps (résistances nulles, aucune source), le théorème de Noether pour les translations temporelles implique

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = 0} \tag{34}$$

c'est-à-dire que l'énergie électromagnétique totale est conservée.

Énergies des modes résonnants (modes propres) Dans le cas général inégal, on peut choisir des vecteurs propres M-orthonormaux $\{\boldsymbol{v}_+, \boldsymbol{v}_-\}$ et définir des coordonnées modales $x_\pm$ (construction modale standard, pondérée par M). Dans ces coordonnées, le Lagrangien devient une somme de deux oscillateurs indépendants,

$$\mathcal{L} = \sum_{\mu=\pm}\left[\frac{1}{2}\dot{x}_\mu^2 - \frac{1}{2}\omega_\mu^2 x_\mu^2\right],$$

de sorte que chaque énergie modale

$$E_\mu = \frac{1}{2}\dot{x}_\mu^2 + \frac{1}{2}\omega_\mu^2 x_\mu^2, \qquad \mu = \pm,$$

est séparément conservée : $\dot{E}_\mu = 0$. Leur somme redonne l'énergie totale $H = E_+ + E_-$.